Etude métrique et construction de la cardioïde

Le plan géométrique euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$ les vecteurs polaires d'angle θ.

L'objet de ce problème est l'étude de la courbe Γ définie par l'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$, c'est à dire la courbe de point courant $M(\theta)$ déterminé par $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ avec $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

1.a Comparer les points $M(\theta)$ et $M(\theta + 2\pi)$ d'une part et $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ d'autre part.
Pour étudier Γ, à quel intervalle peut-on limiter l'étude de la fonction $\rho : \theta \mapsto 1 + \cos\theta$?

1.b Dresser le tableau de variation de la fonction $\rho : \theta \mapsto 1 + \cos\theta$ sur $[0, \pi]$.

1.c Préciser, pour les paramètres $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pi/2$, le point et la tangente à la courbe en ce point.

1.d Donner l'allure de la courbe Γ.

2.a Calculer la longueur de la courbe Γ.

2.b Calculer le rayon de courbure en tout point régulier de Γ.

2.c Calculer l'aire du domaine borné délimité par Γ.

3. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1/2, 0)$ et passant par O.
On rappelle que l'équation polaire de cercle est $\rho = \cos\theta$.

3.a On note $I(\theta)$ le milieu du segment d'extrémités $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$.
Justifier que $I(\theta) \in \mathcal{C}$ et calculer la longueur $I(\theta)M(\theta)$.

3.b On note $J(\theta)$ le point du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point $I(\theta)$.
Exprimer $\overrightarrow{OJ(\theta)}$ en fonction de θ et du vecteur $\vec{v}_\theta$.

3.c A quelles conditions particulières a-t-on $J(\theta) = M(\theta)$?
On suppose désormais ce cas exclu.

3.d Montrer que la droite joignant les points $J(\theta)$ et $M(\theta)$ est orthogonale à la tangente à Γ en $M(\theta)$.

3.e Des informations précédentes, déterminer un procédé permettant, à l'aide du cercle $\mathcal{C}$, de construire les points $M(\theta)$ et les tangentes à Γ en ces points.